Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Сумма заполнений

Для билета

Для билета

Вариант задания 2

Лист работы 1 из 5

№1

$v_м$ - скорость подачи ягод машей в л.т. мин., $v_а$ - Артура, $v_к$ - Кирилла. N - кол-во ягод в 1 корзине.

Из условий

$N = (v_м + v_к) \cdot 10\,мин. = (v_а + v_к) \cdot 15\,мин = (v_м + v_а) \cdot 12\,мин.$

$10\,мин \Rightarrow 10 v_м + 10 v_к = 15 v_а + 15 v_к \Rightarrow v_к = \frac{1}{5} 2 v_м - 3 v_а.$

$\Rightarrow 18 \cdot v_а + 18 \cdot v_м = 15 v_а + 15 \cdot (2 v_м - 3 v_а) \Rightarrow v_м = 4 v_а \Rightarrow$

$\Rightarrow v_к = 2 \cdot 4 v_а - 3 v_а = 5 v_а. \quad N = (v_м + v_к) \cdot 10\,мин =$

$= 90\,мин \cdot v_а \Rightarrow v_а = \frac{N}{90\,мин.}$

$t(v_а + v_к + v_м) = 2N = t \cdot 10 \cdot \frac{N}{90\,мин} = 2N \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 18\,мин.$

№2.

$3x^2 - x - 14 = (x+6)(x-7) = 4(y-1)(x+2)$

$x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 14 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$

$3x^2 - x - 14 = 4xy + 8y - 4x - 8 \Rightarrow 3(x^2+x-2) = 4y(x+2)$

$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \Rightarrow 3(x-1)(x+2) = 4y(x+2)$

$x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 2}}{2}$ Предположим $x \neq -2$ (т.е. $x+2 \neq 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x-1) = 4y \Rightarrow y = \frac{3(x-1)}{4} \Rightarrow x - 1 \stackrel{4}{=} 0$

$\Rightarrow x = 4k+1;\ y = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Если $x = 2 \Rightarrow y$ любой, $y \in \mathbb{Z}$.

Продолжение №4.

$x \in (\sqrt{74}; 9] \ni -a \to -a^2 + \sqrt{9} \in (2\sqrt{74}; 6]$.

$y \in (16 + 8a - 74 + 14 + a^4 + 4\sqrt{74}a^2 < y \leq 64 + a^4 + 16a^2$

$74 + a^4 + 4\sqrt{74}a^2 < a^4 + 4\sqrt{74}a^2 + 8\sqrt{74} + 32$ – верно.

$a^4 + 4a^2\sqrt{74} + 8\sqrt{74} + 32 \leq 64 + a^4 + 16a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2(4\sqrt{74} - 16) \leq 32 + 16 + 8\sqrt{74}$

$a^2 \leq \frac{8(4 + \sqrt{74})}{2(\sqrt{74} - 4)} = \frac{2(4 + \sqrt{74})^2}{74 - 16} = \frac{(2 + \sqrt{74})^2}{-4}$?

$a \leq \frac{(2 + \sqrt{74})}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{74} + \sqrt{4}\sqrt{37}}{\sqrt{4}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{8}}{5}(\sqrt{2} + \sqrt{7})$.

$\Rightarrow$ противоречие, т.к. $a^2 > 0$.

Далее $\frac{(x+2)(x-4)}{\sqrt{74} - x} < 0 \Rightarrow x \in [-2; \sqrt{74})$

$\Rightarrow \frac{(x+2)(x-4)}{x - \sqrt{74}} > 0 \Rightarrow x \in [-2; \sqrt{74}) \cup [4; +\infty)$,

где точки:

$(x+2)(x-4) = -(a^2+2)(\sqrt{74} - x)$

$x^2 + -2x - 8 = xa^2 - \sqrt{74}a^2 + 2x - 2\sqrt{74}$.

$\Rightarrow x^2 - (a^2+4)x - (8 - \sqrt{74}a^2 - 2\sqrt{74}) = 0$.

$D = a^4 + 16 + 8a^2 + 32 - 4\sqrt{74}a^2 - 8\sqrt{74} =$

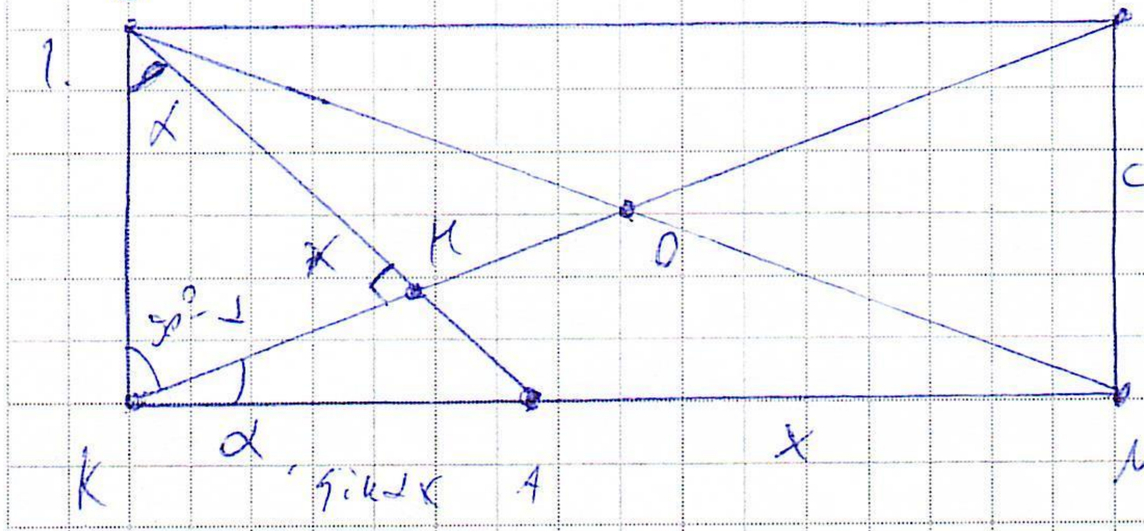
$= a^4 + a^2(8 - 4\sqrt{74}) + 48$.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2.

№5.



$\angle A = AN = x$

$\angle MKN = \alpha$

$H = LA \cap KM$

$\triangle KLA$: $\angle LKN = 90° - \alpha$,

$\angle LHK = 90°$ ⇒

⇒ $\angle KLH = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$

⇒ $\triangle KLA$: $KA = \sin 2x$, $LK = MN = \cos 2x$

⇒ $KN = x(1 + \sin\alpha)$ ⇒ $tg\alpha = \frac{\cos 2x}{(1+\sin\alpha)x}$

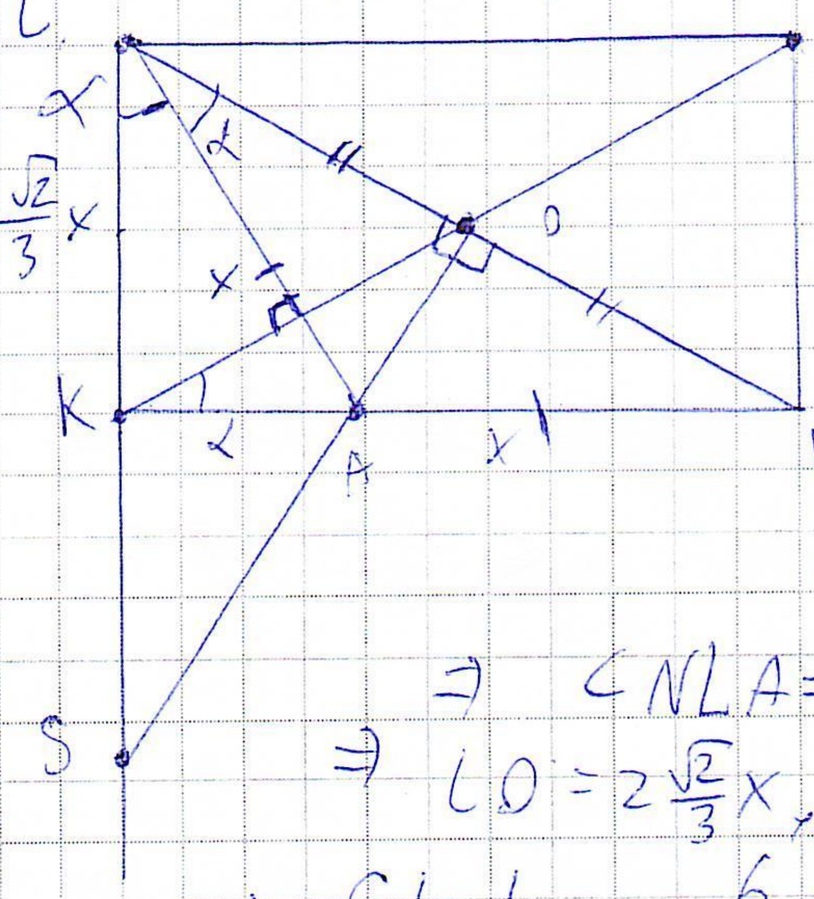
⇒ $\sin\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ ⇒

⇒ $2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$, $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ ⇒ $0 < \sin\alpha < 1$.

⇒ $\sin\alpha = \frac{-1 + 3}{6}$, если $\sin\alpha = -\frac{3+1}{6} < 0$ ⇒

⇒ противоречие ⇒ $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

$KA : AN = \sin\alpha : 1 = \frac{1}{3} : 1 = 1 : 3$.



$AO \perp CN$, т.к. AO – медиана

в равнобедренном $\triangle LAN$, $LO = ON$

$KL = \cos 2x = \frac{\sqrt{8}}{3} x = \frac{2\sqrt{2}}{3} x$.

$KLMN$ – прямоугольник ⇒ $\triangle LNK = \triangle KMN$ ⇒

⇒ $\angle LNK = \alpha$, $\triangle LAN$ – равнобедр. ⇒

⇒ $\angle NLA = \alpha$ ⇒ в $\triangle KLO$ – биссектриса и высота медиана ⇒

⇒ $LO = 2\frac{\sqrt{2}}{3}x$, $SL = \frac{LO}{\cos(2\alpha)} = 2\frac{\sqrt{2}}{3}x \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}\sqrt{2}x$ ⇒

⇒ $SL : LA = \frac{6}{7}\sqrt{2} : 1 = 6\sqrt{2} : 7$.

Можно использовать оборот листа для записи решений

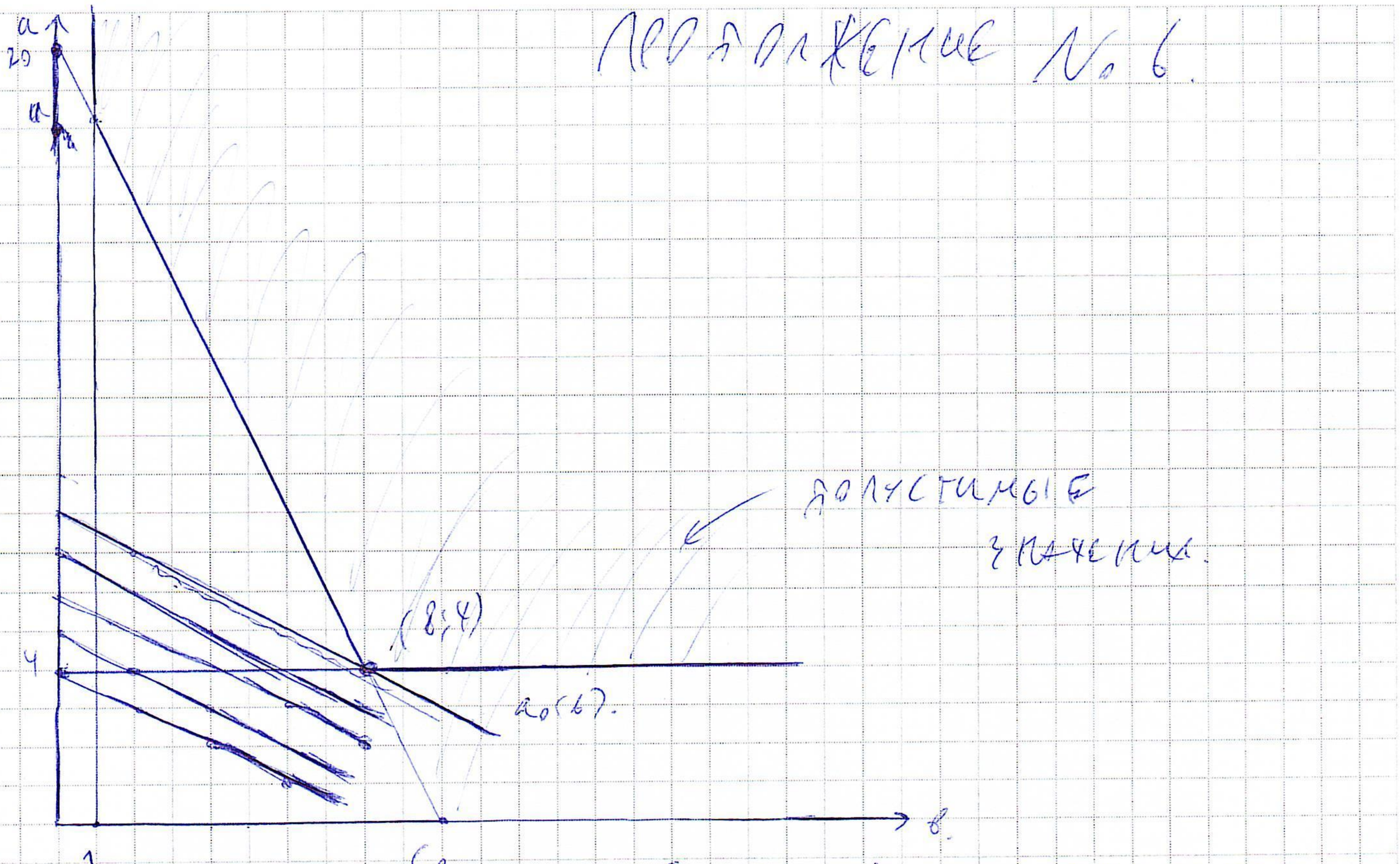
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2.

Лист работы 1 из 5

Продолжение №6.



Итак $C = \text{const} \Rightarrow a = \frac{C_0}{2} - \frac{b}{2}$, минимальность C_0 это минимальность $\frac{C_0}{2}$, т.е. выберем такую точку a_0, что она лежит через области допустимых значений вдоль прямой $b = 8$, и a_0 минимально, т.к. она на оси, и $a_0 = \frac{C_0}{2}$ - тоже минимально.

Попробуем несколько точек, и посмотрим графически

$a_0 = 8 = \frac{C_0}{2} \Rightarrow C_0 = 16$, при этом из графика $a = 4$; $b = 8$, и $4c = 200 - 6 \cdot 8 - 4 \cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 25 - 12 - 3 = 10$.

Ответ: минимальная стоимость изготовления хлебобокса равна 16, при 4 трапециевидных, 8 круглых и 10 квадратных.

Можно использовать оборот листа для записи решений

$C - 2a + 2b$ – ближ. целых

a и b – целые

$\frac{C_0}{3} - 2b = a$

$2a - 2b = a$

$(10; 7)$

1

0

4

$a = \frac{C_0}{2} - \frac{b}{2}$.

b

Подсчёт целых точек через a и b: $a = 2a - 2b$, ближ. строго это минимальное расстояние до ближ. целой точки $a = 2a - 2b$.

Рассмотрим $C = const \Rightarrow a = \frac{C}{2} - \frac{b}{2}$ т.е. рассмотрим прямую $a = \frac{C_0}{2} - \frac{b}{2}$, которая проходит через наименьшую область и целую точку.

С минимальным $C = C_0$ графически (т.е. минимальная C_0 из допустимых $a; b; c$).

Эта целая точка это $(10; 7)$, остальные точки лежат выше $\Rightarrow b = 10; a = 7$

olymp.bmstu.ru

№6.

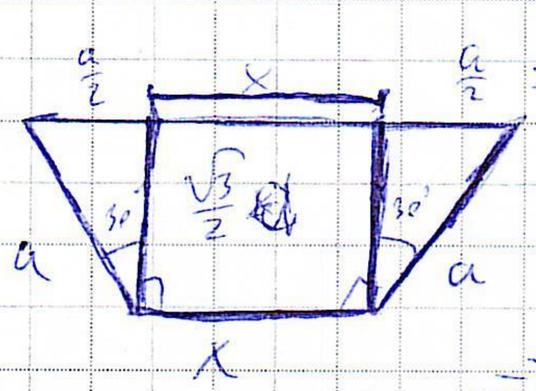
Вычислим максимальную площадь под сеткой фигур.

У квадрата $2\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$ м $= 4\sqrt{3}$ м²

У круга $6\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$ м $= \pi R \Rightarrow R = \frac{6}{\sqrt{\pi\sqrt{3}}}$, $\frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{36}{\pi\sqrt{3}}$ м² $= 6\sqrt{3}$ м²

У трапеции S:

$2a + x = 6$ м



$\frac{a}{2} = a + x$, $S = \frac{1}{2}(2a + 2x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$x = 6$ м $- 2a$

$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}a(2a + 12$ м $- 3a) =$

$= 3\sqrt{3}\ a(3$ м $- a)\frac{1}{4}$

$-a^2 + 3$ м a — парабола, ветви вниз $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ вершина это максимум, её коорд. $a_0 = \frac{3\text{ м}}{2} = 1{,}5$ м

$\Rightarrow S = \frac{3\sqrt{3}}{4}(4$ м $- 2$ м$) \cdot 2$ м $= 3\sqrt{3}$ м².

a – кол-во трапециевидных клеток.

b – полукруглых, c – квадратных $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sqrt{3}a + 6\sqrt{3}b + 4\sqrt{3}c = 100\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a + 6b + 4c = 100$. А чем ещё?

$5a + 7b + 4c = C \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a + b = C - 100$.

$4c = 100 - 3a - 6b \le 40 \Rightarrow a + 2b \ge 20$; $a \ge 4$; $b \ge 1$.

$3a + 6b \le 100 \Rightarrow a \ge 20 - 2b$; $a \le \frac{100}{3} - 2b$.

Область

Нарисуем допустимых значений.

(прямая $a = \frac{100}{3} - 2b$ не рисуется, т.к. она не нужна для нахождения минимума, есть чем точки $(4; 8)$ ниже её)

Продолжение на след. стр.

olymp.bmstu.ru

$x = \frac{a^2+4 \pm \sqrt{D}}{2}$, при этом $\sqrt{D} \geq 0 \Rightarrow$

и $D \geq a^4+4$, т.е. если $x < 0$.

Всегда будет $x \geq 0$; $x = \frac{a^2+4+\sqrt{D}}{2}$.

$D = a^4 + a^2(8-4\sqrt{14}) + 48 \geq 0$, $x < 0$ бы. ~~не~~ будет существовать.

$a = \frac{2}{4}\sqrt{14-8}$ при этом это парабола ветвями вверх, и уравнение имеет $64+4\sqrt{14}-64\sqrt{14}-9\cdot 48 =$

$= 64(1-\sqrt{14}) + 4(14-48) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~не~~ всегда существует ~~не~~всегда.

Ответ: Если $a \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}(\sqrt{2}+\sqrt{7}); \frac{\sqrt{5}}{5}(\sqrt{2}+\sqrt{7})\right)$

существует пол. решение x

~~Ответ~~ $x \in [0; \sqrt{14}) \cup [4; +\infty)$,

Если $x \geq 4$:

$a^2+4+\sqrt{D} \geq 8$, ~~$a^2 \in 4$~~ $4-a^2 \leq \sqrt{D}$

$16 + \cancel{a^4} - 8a^2 \leq \cancel{a^4} + 8a^2 - 4\sqrt{14}a^2 + 48$.

$a^2(16-4\sqrt{14}) + 32 \geq 0$, что верно.

Ответ: Если $a \in \left[-\frac{\sqrt{5}}{5}(\sqrt{2}+\sqrt{7}); \frac{\sqrt{5}}{5}(\sqrt{2}+\sqrt{7})\right]$, то

$x = \frac{a^2+4+\sqrt{a^4+a^2(8-4\sqrt{14})+48}}{2}$ пол. решение

$y = \frac{\sqrt{a^4+4a^2\sqrt{14}+8\sqrt{14}+32}-a^2}{2}$, если $a \geq \frac{\sqrt{5}}{5}(\sqrt{2}+\sqrt{7})$, то

$x = \frac{a^2+4+\sqrt{a^4+a^2(8-4\sqrt{14})+48}}{2}$

olymp.bmstu.ru

№ 4.

Числитель дроби: $x^3 + x^2 + 4 - 4x - x^3 + 2x - 12 =$

$= x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$.

$x_0 = \frac{2 \pm \sqrt{4+4\cdot 8}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = 4; -2$

Далее $\frac{(x+2)(x-4)}{\sqrt{14}-x} \geq 0$ т.е. $\frac{(x+2)(x-4)}{x-\sqrt{14}} \leq 0$.

$x \neq \sqrt{14}$, т.к. $\sqrt{14} - x \neq 0$.



$x \in (-\infty, -2] \cup [\sqrt{14}, 4]$.

$\Rightarrow (x+2)(x-4) = (a^2+2)(\sqrt{14}-x) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + a^2 x - (a^2\sqrt{14} + 2\sqrt{14} + 8) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = -a^2 + 4a^2\sqrt{14} + 2\sqrt{14} + 8 = a^2(4\sqrt{14} - 1) + 2\sqrt{14} + 8 > 0$

$\Rightarrow x = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^2(4\sqrt{14}-1) + 2\sqrt{14} + 8}}{2}$,

$\Rightarrow x > 0$, если $\sqrt{a^2(4\sqrt{14}-1) + 2\sqrt{14} + 8} > a^2$,

и $x \in (\sqrt{14}; 4]$.

$-a^4 + a^2(4\sqrt{14} - 1) + (2\sqrt{14} + 8) > 0$,

$D = a^4 + 4a^2\sqrt{14} + 8\sqrt{14} + 32$.

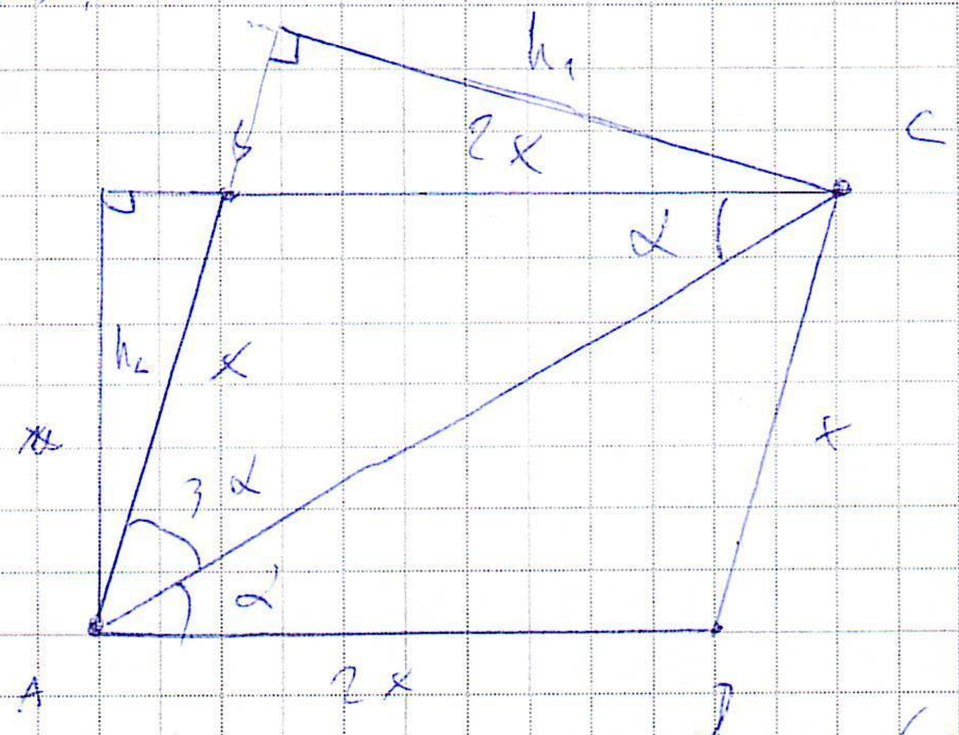
$x = \frac{-a^2 \pm \sqrt{D}}{2}$, $\exists x_0 > 0$, если $\sqrt{D} > a^2$ и

и $4a^2\sqrt{14} + 8\sqrt{14} + 32 > 0$, что верно при $\forall a$.

ПРОДОЛЖЕНИЕ НА СЛЕД. БЛАНКЕ.

olymp.bmstu.ru

№3.



$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

$BC = 2x$, $AB = x \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCA = \angle CAD$,

$\angle BAC > \angle BCA = \angle CAD$

т.к. $BC > BA$ (напротив большего угла, большая сторона)

$\Rightarrow \angle CAD = 3\alpha$, $\angle CAD = \alpha$ - из условия.

По т. Синусов в ΔBAC:

$$\frac{2x}{\sin(3\alpha)} = \frac{x}{\sin\alpha} \Rightarrow 2\sin\alpha = \sin(3\alpha),$$ что верно эл.

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \text{ и } \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$$

$0 < 4\alpha < \pi$, т.к. - это параллелограмм $\Rightarrow$

$$1. \alpha < \frac{4\pi}{6} + 2\pi k < \pi \Rightarrow k = 0;\ \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

$$2. \alpha < 4\cdot\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < \pi$$ - геом. метх. $\angle ABC = \pi - 4\alpha$.

По т. Синусов:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(\pi - 4\alpha)} = \frac{AC}{\sin(4\alpha)} = \frac{AC}{\cos\alpha} \Rightarrow AC = \frac{x}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Один из высот $h_1 = AC\cdot\sin 3\alpha$, а другая $h_2 = \sin 2\alpha\, AC$,

$= AC$.

$h_2 < h_1 \Rightarrow h_2 = x\cos 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Площадь параллелограмма. $10\sqrt{3} = 2x\cdot h_2 = \sqrt{3}x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{10} \Rightarrow h_2 = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

olymp.bmstu.ru